La fonction logarithme népérien

1. Définition

*Définition* : La fonction logarithme népérien est l’unique fonction définie et dérivable sur , notée , telle que  et .

*Démonstration*: La fonction  est continue sur . D’après le cours sur les intégrales, elle y admet des primitives *F*, dont une seule vérifie la condition initiale . Ceci équivaut à dire que la fonction logarithme népérien est égale à .

1. Propriétés algébriques

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs, et pour tout entier naturel *n*, on a :

    

*Démonstrations :*

*  a été démontré dans le TD d’introduction. On remarque que dans le TD d’introduction on est parti de l’équation fonctionnelle  pour définir la fonction logarithme népérien, c’est donc une autre possibilité de définition de la fonction .
* 

Pour (1), on a utilisé 

* 

Pour (1), on a utilisé 

Pour (2), on a utilisé 

* comme souvent, on va faire une récurrence pour montrer que 
  + Initialisation : pour , on a  et . La propriété est vraie.
  + Hérédité : Supposons que pour *n* fixé, .

Calculons 

 car 

 d’après l’hypothèse de récurrence



La propriété est vraie au rang 

* + Conclusion : on a montré d’après l’axiome de récurrence que  pour tout entier naturel *n* et pour tout réel *a* strictement positif.
* 

Pour (1), on a utilisé 

1. Étude
   1. Sens de variation et dérivée

La fonction logarithme népérien admettant  comme dérivée, elle est strictement croissante sur . C’est donc une bijection, de l’intervalle , vers un intervalle à déterminer.

*Rappel*: une bijection est une fonction *f*, définie sur un intervalle *I*, à valeurs dans un intervalle *J*, pour laquelle tout nombre *y* de l’intervalle image *J* admet un seul antécédent par *f* dans l’intervalle *I*. C’est à dire que pour tout nombre *y* de *J*, l’équation  admet une solution unique dans *I*.

* 1. Fonction réciproque

On admet :

* Qu’une bijection  admet une fonction réciproque  (la réciproque « part » de *y* pour « arriver » à *x*) ;
* Que la réciproque d’une fonction dérivable est dérivable (il y a des petites nuances à apporter…, voir par exemple la fonction carré sur , et sa réciproque la racine carrée, qui n’est pas dérivable en 0) ;
* La formule , plus simplement écrite : 

Soit *f* la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, elle vérifie :

 ; en effet *f* et la fonction logarithme népérien « font l’inverse » l’une de l’autre.

En dérivant, on obtient :

 on a appliqué , où 



et 

soit : 

Les fonctions , où *k* est un réel quelconque, vérifient cette relation (faites cette vérification).

Réciproquement, soit *f* une fonction vérifiant .

Dérivons la fonction .

 (on utilise )

On en déduit que 

On a montré que les seules fonctions vérifiant , sont les fonctions, où .

La fonction réciproque du logarithme népérien est donc de ce type.

Elle vérifie de plus , car  (on échange les *x* et les *y*).

D’où , on a montré le :

*Théorème*: la fonction réciproque du logarithme népérien est l’exponentielle naturelle.

*Conséquences :*

 et 

 et 

 et  (fonctions croissantes)

 puisqu’on a en fait écrit 

*Remarque*: ceci prouve l’existence de la fonction exponentielle d’une autre manière que celle vue en DM.

* 1. Limites

*Théorème*:  et 

*Démonstration*: on utilise le fait que la réciproque du logarithme népérien soit la fonction exponentielle, et on « réciproquise » les limites  et .

* 1. Tableau de variation

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 |  | +∞ |
|  |  | + |  |
|  |  |  | +∞ |
|  |  |  |  |
|  | -∞ |  |  |



* 1. Courbe représentative

*Ci-contre*

Equation des tangentes (à vérifier) :

* Au point d’abscisse 1 
* Au point d’abscisse e 
  1. Approximation affine en 1

*Théorème*: 

*C’est à dire*: 

*Démonstration*:



On a utilisé la définition du nombre dérivé  ; et le 4° ci-dessous pour le calcul de la dérivée : 

1. Dérivée de 

*Théorème :* Soit *u* une fonction strictement positive sur son ensemble de définition I. On admet que la dérivée de la fonction définie sur I par  est la fonction .

On retient .

1. Croissances comparées

*Théorème*:  et 

*Démonstrations*:

* On peut partir des croissances comparées avec l’exponentielle, et passer à la réciproque :

On pose  dans , on obtient alors 

Faites de même avec .

* On peut aussi étudier la fonction  sur .

, positif pour  et négatif pour .

*f* est décroissante sur  et croissante sur . Son minimum est atteint en 1 et vaut .

On en déduit que .

Posons , on obtient alors  en divisant par *X*.

Par ailleurs en +∞, X et  sont positifs.

L’inégalité précédente peut être complétée en .

On applique le théorème des gendarmes, comme , on en déduit que .

1. Logarithme décimal

*Définition*: le logarithme décimal est la fonction définie sur  par .

Cette fonction est utilisée principalement en physique et en sciences de la vie et de la terre pour son côté pratique. En effet, elle vérifie en particulier la propriété .