THÉORÈMES DE CONVERGENCE SUR LES SUITES

1/ Théorèmes de comparaison.

Hypothèse 1 Inégalité valable à partir d'un certain rang	Hypothèse 2 Comportement en $+\infty$	Conclusion
$u_n \leq v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
$v_n \leq u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$u_n \leq v_n \leq w_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Démonstration du premier théorème (ROC) : reprendre la démonstration du théorème équivalent sur les fonctions, faire un schéma.

On rappelle la définition : la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert du type $]A;+\infty[$, avec A aussi grand que l'on veut, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang N.

2/ Rappel : comportement des suites géométriques.

Lemme : $(1+a)^n \geq 1+na$ pour a réel positif et n entier naturel

Démo : par récurrence

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 positif.

Si $q > 1$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$;

Si $q = 1$ alors (u_n) est constante et converge vers u_0 ;

Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) converge vers 0 ;

Si $q = -1$ alors (u_n) diverge, en alternant entre u_0 et $-u_0$;

Si $q < -1$ alors (u_n) diverge (en allant alternativement vers $+\infty$ et $-\infty$) ;

Démonstrations : déjà faites, la $1^{\text{ère}}$ est une ROC

3/ Convergence des suites monotones.

Théorème : Si une suite (u_n) est croissante et admet L pour limite, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à L.

Démonstration : par l'absurde. Supposons qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > L$ (le contraire de la conclusion $u_n \leq L$). Comme la suite admet L pour limite, l'intervalle $]L-1;u_{n_0}[$, qui est un intervalle ouvert contenant L, doit donc contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Mais comme la suite est croissante, tous les termes tels que $n \geq n_0$ vérifient $u_n \geq u_{n_0}$, et donc n'appartiennent pas à $]L-1;u_{n_0}[$. Absurde.

Théorème : toute suite croissante majorée converge.
Remarques :

- Théorème admis.
- De manière équivalente, toute suite décroissante minorée converge.
- Dans ce paragraphe, seul ce théorème est exigible en théorie. Dans les faits, les autres peuvent être utiles pour certains sujets du bac.

Théorème : une suite croissante non majorée admet +∞ pour limite.
Remarque : de même, une suite décroissante non minorée admet -∞ pour limite.
Démonstration : Soit A un réel quelconque, aussi grand que l'on veut. Dire que (u_n) est non majorée, cela signifie que u_n « dépasse » A pour un certain rang N (sinon (u_n) serait majorée par A). Comme de plus (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N$ pour $n \geq N$. Donc tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$ à partir de N, CQFD (faire le schéma).

Remarque :

- pour vous entrainer, vous pouvez prouver le théorème : Toute suite convergente est bornée.
- La démonstration se fait par disjonction des cas :
  - D'une part l'intervalle $]l-1;l+1[$ contient tous les termes à partir d'un rang N (pourquoi ?)
  - et les premiers termes sont bornés par leur min et max.
- D'où la contraposée à écrire :