Algorithmes sur les fonctions

Rappel : utilisation des Notebooks

Les notebooks, comme celui-ci que vous venez d'ouvrir, sont des pages web interactives dans lesquelles on peut taper du texte courant, du texte mathématiques, ainsi que du code informatique.

Faites une copie du notebook avec la commande ci dessus "File>Make a Copy...", et renommez-le en cliquant sur le titre (à côté de jupyter TD1...), par exemple en rajoutant votre nom.

On peut entrer des expressions (opérations, calculs) ou des instructions (des commandes) dans tous les champs ci-dessous qui commencent par In[..]. Pour taper plusieurs lignes de code à la suite, on appuie sur la touche entrée entre deux lignes (rien de spécial donc).

Le résultat s'obtient avec :

- ctrl + entrée, dans ce cas on reste dans la cellule courante;
- majusucule + entrée, dans ce cas on passe à la cellule suivante.
- Après exécution, le résultat d'un programme est souvent précédé de Out[ ].
  Exemple : tapez ctrl entrée après avoir cliqué dans la cellule ci-dessous

En cas de plantage : Si lors d'une tentative d'éxécution de programme, rien ne se passe, c'est probablement que vous avez tapé un programme qui boucle infiniment. Dans ce cas, commencez par sauver votre travail. Puis deux possibilités:

- essayez d'abord de redémarrer le noyau Python (restart dans le menu kernel en haut de la page)
- sinon, allez dans l'onglet "Home", et fermez le TD : cocher la case correspondante, "shutdown" en haut de la page. Fermez ensuite l'onglet du TD, et relancez-le à partir de "Home".
  Si vous voulez reprendre ce TD chez vous, le plus simple est d'installer le navigateur Anaconda (puis cliquer sur launch jupyter notebook etc.).

Méthode des rectangles pour le calcul d'une intégrale

Soit f une fonction positive et continue sur [a ; b]. On a vu en cours un algorithme qui permet de calculer une valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [a ; b].

Algortihme

Algorithme en langage "naturel":

Algorithme : méthode des rectangles
entrée : une fonction f intégrable sur un intervalle [a ; b].
entrée : les réels a et b.
entrée : un entier naturel strictement positif n donnant le nombre de rectangles
sortie : une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Début

Rentrer a
Rentrer b Donner f
$pas \leftarrow \frac{b-a}{n}$
$x \leftarrow a$
$somme \leftarrow 0$
Pour *i* **de** 1 **à** *n* **faire**:

$somme \leftarrow somme + pas \times f(x)$
$x \leftarrow x + pas$

Fin pour
afficher $somme$

Fin

Exercice 1

Le programme Python ci-dessous est à compléter pour implémenterc et algorithme. Par rapport aux programmes précédents, vous remarquerez que sa structure est différente.
Il comporte quatre parties, dont deux que vous ne modifierez pas (sous peine de probable plantage !):

- une fonction d'affichage de la fonction f et des rectangles (ne pas y toucher)
- une fonction définissant la fonction f, que vous pouvez modifier pour mettre une autre fonction
- une fonction de calcul de la somme des aires des rectangles, à compléter suivant l'algorihtme ci-dessus.
- le programme principal, à ne pas modifier, qui coordonne l'appel des trois fonctions précédentes. Rappelez-vous de la syntaxe en Python : il y a deux points après un "for", et on indente. Et les virgules des nombres sont des points...

In [ ]:
```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Frédéric Mandon
"""

# Ne pas modifier les trois lignes ci-dessous
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
    """
    Fonction f(x) = x^2, a modifier si on veut une autre fonctio
n
    @param : x un réel pour lequel f est definie
    @return : y réel, image de x par f
    """
    y = x**2
    return y

def rectangles1(f,a,b, n):
    """
    Premiere version de l'algorithme des rectangles pour le calc
ul approche d'une integrale
    @param : f fonction dont on veut calculer l'integrale
    @param : a reel borne inferieure de l'integrale
    @param : b reel borne superieure de l'integrale
    @param : n entier nombre de rectangles
    @return : somme valeur approchee de 'lintegrale de f entre a
et b

    Remarque: la partie graphique ne peut fonctionner que si l'o
n conserve les memes
    notation pour les variables que dans l'algorithme, c'est a d
ire x et pas.
    """
    # Completer



    for i :      # a completer
        # mettre le code avant la partie graphique


        # fin du code
        # Ci-dessous pour tracer un segment [AB] ou A(xA,yA) et
B(xB,YB), on ecrit d'abort [xA,xB] puis [yA,Yb]
        plt.plot([x-pas,x-pas],[0,f(x-pas)],linewidth=1.0,linest
yle ="-",color="red")   #segment vertical gauche
        plt.plot([x,x],[0,f(x)],linewidth=1.0,linestyle ="-",col
or="red")   #segment vertical droit
        plt.plot([x-pas,x],[f(x-pas),f(x-pas)],linewidth=1.0,lin
estyle ="-",color="red")   #segment horizontal
        """
        Pour l'exercice 2, remplacer les trois lignes précédente
s par
        plt.plot([x-pas,x-pas],[0,f(x)],linewidth=1.0,linestyle
```

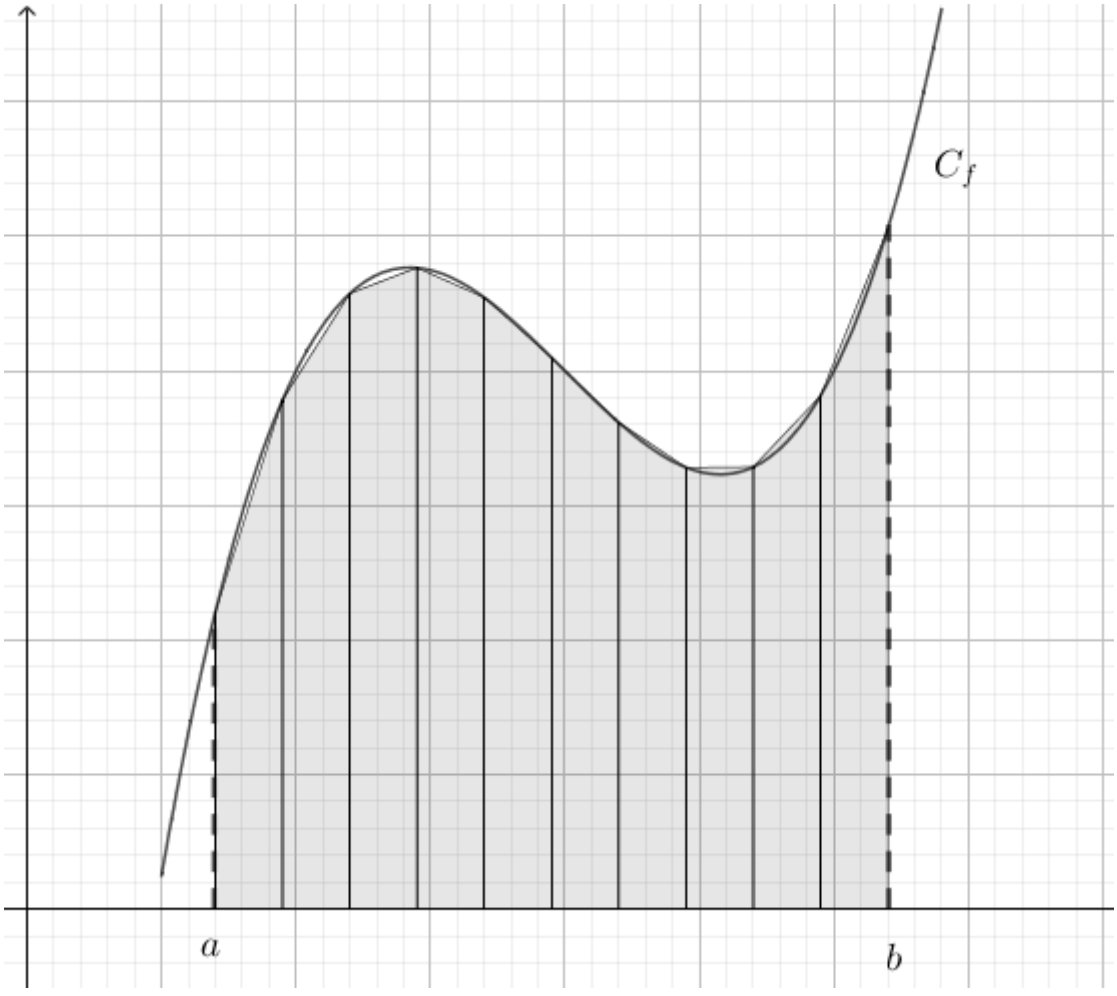
Exercice 2

Modifier l'algorihtme précédent pour calculer la somme des aires des rectangles de côté $[x_i\ ;\ x_{i+1}]$ avec comme hauteur $f(x_{i+1})$.
Vous avez le code dans le programme précédent, pour modifier le schéma de manière à ce qu'il corresponde au calcul.

In [ ]:

Exercice 3

Modifier l'algorithme précédent pour calculer la somme des aires des trapèzes, comme ci-dessous, et non plus des rectangles.
Vous pouvez également modifier le code pour avoir un schéma correct.



In [ ]:

Dichotomie

L'algorithme de dichotomie permet de calculer la valeur approchée de la solution d'une équation $f(x) = 0$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b], telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposés. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet (au moins) une solution sur [a ; b]. Pur plus de commodité, on considèrera une fonction n'ayant qu'une racine sur [a ; b].
Le principe de la dichotomie consiste à diviser en deux l'intervalle à chaque itération, en choisissant le sous-intervalle contenant la racine de f.

Algorithme

Algorithme en langage "naturel", à bien comprendre

Algorithme : calcul d'une racine
entrée : une fonction f continue sur un intervalle [a ; b], telle que l'équation $f(x) = 0$ n'admette qu'une solution sur cet intervalle.
entrée : les réels a et b.
entrée : ϵ (epsilon), la précision attendue sur la racine
sortie : une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$
Début

Rentrer a
Rentrer b
Donner ϵ
Tant que $|b - a| > \epsilon$:

$m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
si $f(a) \times f(b) > 0$

$a \leftarrow m$

sinon

$b \leftarrow m$

Fin tant que
afficher a

Fin

Exercice 1

Faire tourner l'algorithme à la main, en donnant le tableau des valeurs a, b et m, à chaque itération,

In [ ]:
```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Frédéric Mandon
"""

# Ne pas modifier les trois lignes ci-dessous

from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
    """
    Fonction f(x) = x^3 - 3x^2 + 1
    @param : x un réel pour lequel f est definie
    @return : y réel, image de x par f
    """
    #y  = float(0.125*x*(63*x**4-70*x*x+15))
    # y = x*exp(x) -3
    y = x**3 -3*x**2 +1
    return y

def dichotomie(f,a,b, epsilon):
    """
    Calcul d'une racine d'une fonction
    @param : f fonction dont on veut trouver une racine
    @param : a reel borne inferieure de l'intervalle
    @param : b reel borne superieure de l'intervalle
    @param : epsilon reel precision demandee
    @return : m valeur approchee de la solution de f(x) = 0
    @return : i,valeurs variables pour l'affichage des erreurs

    Remarque: la partie graphique ne peut fonctionner que si l'o
n conserve les memes
    notation pour les variables que dans l'algorithme, c'est a d
ire m, a et b.
    """
    # ne pas modifier les lignes deja tapees, sauf le while a co
mpleter
    i=1
    valeurs = []
    while   :
        # code a completer ci-dessous



        # fin du code a completer
        valeurs.append(m)
        i = i + 1
        plt.plot([m, m], [0, f(m)],linewidth=1.0,linestyle ="-",
color="red",marker = "x")
    return m,i,valeurs


a = float(input("borne inférieure de départ : "))       # on ren
tre les bornes
b = float(input("borne supérieure de départ : "))
```

Frederic Mandon (mailto:frederic.mandon@ac-montpellier.fr), Lycée Jean Jaurès - Saint Clément de Rivière - France (2018)