

MATHEMATICA DINOSAURUS

Une collection d'exercices provenant pour les deux tiers, d'un recueil de Jean-Marc Dewasme, anciennement professeur au lycée Joffre de Montpellier. Quelques uns proviennent d'un vieux livre de TS de M. Terracher, en tant que tels ils sont protégés mais c'est pécher que de les laisser se perdre ! D'autres sont de mon cru, certaines rédaction viennent de M. Amposta (lycee.mathematiques.free.fr), et enfin d'autres sont de provenance inconnue, glanés au fil du temps. Les indications de difficulté (☺, ☺☺ et enfin ☺☺☺) sont en général de M. Dewasme, je n'ai pas forcément le même ressenti, à chacun ses goûts et ses couleurs !

Certains exercices, sans être corrigés, bénéficient d'indices/de pistes de réflexion. La difficulté devient alors bien plus raisonnable.

Par ailleurs, certains de ces exercices me paraissent ~~faciles pas trop difficiles~~ envisageables, je les ai signalés avec un ☺. N'ayant pas fait ou refait depuis longtemps une partie de ces exercices, et jamais pour quelques-uns, il est fort possible que j'en ai oublié.

Les exercices me paraissant particulièrement enrichissants sont signalés par ⚡. J'ai essayé de mettre dans cette catégorie des exercices ☺ en majorité.

Certains de ces exercices, surtout en analyse, nécessitent des compléments de cours. Ces compléments sont faciles à comprendre et à trouver sur le web, et si vous êtes élève votre professeur peut vous les expliquer rapidement. Quand j'y ai pensé, j'ai signalé sur les exercices la nature de ces compléments. Il s'agit principalement de :

- Suites adjacentes ;
- Asymptotes obliques ;
- Composition des fonctions et dérivée d'une fonction composée ;
- Intégration par parties ;
- Bijections, continuité de manière un peu plus fine que dans le programme officiel ;
- Fonctions puissances, croissances comparées ;
- Notions sur les factorielles ;
- Arrangements et combinaisons ;
- Bases et systèmes de numération (en arithmétique).

Par ailleurs, les outils informatiques peuvent donner facilement la solution de certains exercices (et cela est très enrichissant à programmer). Si vous trouvez la solution par ce moyen, n'oubliez pas de prouver vos conjectures par la suite !

« Cette compilation contient des exercices que j'ai pratiquement tous donnés à mes élèves, pas toujours à une classe entière bien sûr, mais quelquefois à un petit groupe d'élèves motivés. Ce qui prouve qu'il y a eu à Joffre (et qu'il y a encore) d'excellents élèves. C'est à eux que je dédie ce recueil.

Les lecteurs voudront bien excuser et corriger les erreurs, coquilles et maladroresses, et je les encourage à améliorer certains passages en considérant cet exemplaire comme une source d'idées et non comme un travail accompli.

Jean-Marc Dewasme »

J'ai également donné certains de ces exercices, sous une forme parfois différente -notamment avant de connaître ce recueil- à des élèves du lycée Pierre Poivre de la Réunion, et aussi à des élèves du lycée Jean Jaurès de Saint-Clément-de-Rivière. Ceci en classe entière, en devoir à la maison, ou bien à certains élèves uniquement. Et je confirme : il y a toujours d'excellents élèves, partout. Il suffit de leur donner de quoi se nourrir intellectuellement pour qu'ils se révèlent, ce que les programmes ont eu régulièrement tendance à oublier.

Frédéric Mandon

ARITHMÉTIQUE

I-1 ☺ Déterminer les dimensions entières d'un rectangle dont le périmètre est égal à la surface.

I-2 Trouver un nombre entier entre 1 et 1999×10^{11} qui soit un carré, un cube et une puissance.

I-3 ☺ (complément : bases de numérations). Dans un système de numération N , on note p et q les symboles de $N-1$ et $N-2$.

Écrire $2p$ et p^2 dans ce système.

On suppose maintenant que $N = n^2 + 1$, écrire les carrés des nombres $a = \overline{nn}$ et $b = \overline{pp}$.

I-4 Droit d'aînesse ☺

Deux frères vendent un troupeau de moutons. Le prix de vente d'un mouton est, en euros, égal au nombre de moutons du troupeau. La vente terminée, ils sont en possession d'un nombre impair de billets de 10 euros, et de monnaie inférieure à 10 euros. L'aîné prend un billet de plus que son cadet et lui laisse la monnaie. Combien devrait-il lui redonner pour que le partage soit équitable ?

I-5 Déterminer un nombre entier entre 6×10^4 et 8×10^4 qui soit le produit de 3 nombres premiers dont l'un est la somme des deux autres.

I-6 Date historique

Lors de la guerre de 14-18, en creusant une tranchée, on a découvert le cadavre d'un soldat espagnol armé d'une pertuisane. C'était le dernier jour du mois et le capitaine, qui avait de l'instruction, a multiplié la longueur en pieds de la pertuisane par son âge, le numéro du jour et la longueur en mètres de la tranchée pour trouver 3687901.

Pouvez-vous trouver l'âge du capitaine et la date exacte de cette découverte ?

I-7 n étant un nombre écrit en système décimal, on appelle p le nombre formé par les deux derniers chiffres et q celui formé par les autres. On pose alors $n' = q - 10p$. Montrer que n est divisible par 7 (ou 13) si et seulement si n' l'est.

I-8 Soit n un nombre tel que la somme des tranches de deux chiffres à partir de la droite soit 1998. Quelle est la somme alternée des chiffres de n sachant que cette somme est strictement inférieure à 10.

I-9 Opérations codées ☹

Reconstituez les opérations ci-dessous dans lesquelles les chiffres ont été remplacés par des lettres (en excusant les faiblesses en allemand).

$\begin{array}{r} N \ E \ U \ F \\ + \quad \quad U \ N \\ + \quad \quad U \ N \\ \hline O \ N \ Z \ E \end{array}$	$\begin{array}{r} V \ I \ N \ G \ T \\ + \quad C \ I \ N \ Q \\ + \quad C \ I \ N \ Q \\ \hline T \ R \ E \ N \ T \ E \end{array}$	$\begin{array}{r} F \ O \ R \ T \ Y \\ + \quad \quad T \ E \ N \\ + \quad \quad T \ E \ N \\ \hline S \ I \ X \ T \ Y \end{array}$	$\begin{array}{r} \quad \quad \quad D \ R \ E \ I \\ + \quad V \ I \ E \ R \\ \hline \quad \quad N \ E \ U \ N \end{array}$
$\begin{array}{r} C \ U \ A \ T \ R \ O \\ \times \quad \quad \quad 5 \\ \hline V \ E \ I \ N \ T \ E \end{array}$			

I-10 On choisit 15 nombres entre 1 et 2001 soient premiers 2 à 2. Montrer que parmi ces 15 nombres il y a un nombre premier.

I-11 (complément : bases de numérations). Le professeur Mirot est invité à l'anniversaire d'Anita qu'il ne connaît pas. Les amies d'Anita ont préparé deux gâteaux. Sur le premier, l'âge d'Anita est représenté en système décimal par des bougies vertes pour les dizaines et des bougies blanches pour les unités. Sur le second, l'âge est écrit en système de base 12 avec des bougies roses et blanches, les blanches représentant toujours les unités. Mais le professeur Mirot est daltonien ! Il voit 9 bougies identiques sur le premier gâteau et 10 sur le second. Pouvez-vous l'aider à trouver l'âge d'Anita ?

I-12 Le trésor des pirates

L'équipage d'un bateau pirate comprend 22 marins et un cuisinier chinois. Ils découvrent un coffre rempli de pièces d'or. Les pirates décident de se partager le trésor en parts égales et de laisser au cuisinier les 17 pièces restantes. Mais au cours d'une dispute 5 pirates sont tués ; les autres refont le partage, ce qui ne laisse plus que 10 pièces au cuisinier. Le lendemain le bateau fait naufrage et sur une île ne se retrouvent que 9 pirates, le cuisinier et le trésor. Après un nouveau partage le chinois, qui n'a plus que 4 pièces d'or, décide que cela a assez duré et empoisonne les 9 rescapés. Quel est le nombre minimal de pièces d'or en sa possession ?

I-13 Pourquoi tant de n ? ☹

Montrer que pour tout nombre entier n il existe un multiple de n qui ne s'écrit en système décimal qu'avec des 0 et des 1. Montrer que si n est impair non multiple de 5, il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1 (ces nombres sont appelés des rep-unit).

I-14 Période ([indice](#))

Quel est le plus petit entier n dont l'inverse a un développement décimal illimité formé de 5 chiffres distincts se répétant indéfiniment ?

I-15 On dit qu'un entier n est heureux s'il existe deux entiers a et b tels que $n = a + b$ et n divise ab . Montrer que n est heureux sauf s'il est produit de deux facteurs premiers distincts.**I-16** ☹ ☹ [indices](#).

a. On considère la série harmonique $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Montrer que pour $n > 1$, u_n est sous la forme de fraction irréductible le quotient d'un entier impair par un entier pair. En déduire que si $n > 1$, u_n n'est pas un entier.

b. Plus généralement, on considère la somme $\sum_{i=m}^n \frac{1}{i}$, où $0 < m \leq n$.

Montrer que si $m = n = 1$ la somme est entière (ça ne devrait pas être trop difficile), et que si $n = m > 1$ la somme n'est pas entière (ça ne devrait pas être trop dur non plus).

On se place dans le cas où $n > m$. Montrer que $\sum_{i=m}^n \frac{1}{i}$ n'est pas un entier.

I-17 Un exercice de JP Vaucelle. ☹☹

Un jour Jean Dupont rencontra Albert Einstein et lui dit : « votre renommée est telle que je connais votre âge, mais vous ignorez le mien. Mon âge et le votre n'ont pas de diviseur commun, mais le votre pourrait être l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés seraient mon âge et celui de mon fils ». Après un moment de réflexion Einstein déclara qu'il ne pouvait trouver ces âges. Alors Dupont ajouta : « mon fils est majeur ». Aussitôt le grand Albert trouva les âges. Quels étaient ce jour-là les âges de Dupont et fils ? (Einstein est mort à 76 ans).

I-18 Montrer que si a , b et c sont sans diviseur commun et que $b^2 = ac + a^2$ alors a est un carré.**I-19** Sophisme. ☹ ☹

On peut trouver des nombres de n chiffres dont le carré se termine par ces mêmes n chiffres.

I-20 ☹☹ et ☹ Soit $n = 4444^{4444}$. Montrer que $n < 10^{16500}$. Si on appelle a la somme des chiffres de n , b la somme des chiffres de a et c la somme des chiffres de b , déterminer c .**I-21** Monsieur Septembre a eu 9 filles dont les âges sont régulièrement espacés du même nombre d'année. Cette année il s'aperçoit que le carré de son âge est égal à la somme des carrés des âges de ses filles. Quel âge a-t-il ? (il n'est pas centenaire)

I-22 Binaire vous avez dit binaire... ☹

On numérote des objets de 1 à n et on décide d'en éliminer un sur deux en renvoyant au fur et à mesure les non éliminés en fin de liste. Quel sera le dernier ?

Remarque : c'est un exercice intéressant de programmation récursive.

I-23 Indicateur d'Euler ☹☹ ☺

Soit un entier $n > 1$. On appelle $\varphi(n)$ le nombre d'entiers n inférieurs à n et premiers avec n et E_n l'ensemble de ces entiers.

- Montrer que la somme des éléments de E_n vaut $\frac{1}{2}n\varphi(n)$.
- Montrer que si p est un nombre premier $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$.
- Soient 4 nombres m, n, u, v tels que $um + vn = 1$.
Montrer que si x a pour reste α dans la division par m et pour reste β dans la division par n , alors $x = vn\alpha + um\beta + \lambda mn$. En déduire qu'il existe une seule solution x_0 entre 0 et mn .
- Montrer que $\alpha \wedge m = 1$ et $\beta \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\beta mu + \alpha nv) \wedge mn = 1$ (notation $\wedge$: premiers entre eux).
Comprendre que cela signifie que la correspondance entre $(\alpha; \beta)$ et x_0 est une bijection de $E_m \times E_n$ sur E_{mn} . En déduire que si m et n sont premiers entre eux alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Calculer alors la somme des entiers inférieurs à 2000 et premiers avec 2000.

I-24 Polygones.

Soit n un entier strictement supérieur à 2, et k un entier tel que $0 < k < n$. On pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

On appelle E_k l'ensemble des puissances de z_k et P_k le polygone obtenu en joignant les images de $1, z_k, z_k^2, z_k^3, \dots, z_k^n$.

Montrer que si $k \wedge n = d$, alors $E_k = E_d$, et E_k contient $\frac{n}{d}$ éléments distincts.

En déduire le nombre de polygones à n côtés.

I-25 ☹☹ (complément : bases de numérations). On se propose de déterminer, dans une base donnée, des nombres de deux chiffres identiques dont le carré s'écrit avec quatre chiffres identiques, c'est à dire $\overline{bb}^2 = \overline{aaaa}$.

- Montrer qu'il n'y a pas de solution dans le système décimal. Vérifier qu'en base 41, $b = 29$ est une solution (on donnera la valeur correspondante de a).
- Montrer qu'en base x le problème s'écrit $b^2(x+1) = a(x^2+1)$, et en déduire qu'il n'y a pas de solution si x est pair ([indice](#)).
- On suppose donc que x est impair, $x = 2p+1$. Montrer qu'alors $a = p+1$ et $b = 2p^2 + 2p + 1$.
- On considère l'hypothèse supplémentaire $b = a+1$. Montrer qu'il y a une solution unique
- En revenant au cas général, on cherche p tel que $p^2 + (p+1)^2 = b^2$ (E).

Déterminer les solutions pour p compris entre 0 et 20.

On pose alors $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 2 + 6u_{n+1} - u_n$, et $v_0 = 1$, $v_1 = 5$ et $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$. Vérifier que $p = u_3$ et $b = v_3$ sont encore des solutions de (E).

$$\text{Vérifier que } u_n = \frac{1-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}$$

$$\text{et que } u_n = \frac{2-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{4}(2+2\sqrt{2})^n.$$

Vérifier alors que pour tout n , $p = u_n$ et $b = v_n$ sont des solutions de (E).

I-26 ☹☹ On se propose de déterminer les entiers a et b non nuls vérifiant $(a-b)^2 = a+b$ (on supposera $a < b$).

- On pose $d = a \wedge b$, $a = dx$, $b = dy$. Montrer que $(x+y) \wedge (x-y)$ est égal à 1 ou 2.
- On suppose que $(x+y) \wedge (x-y) = 1$. Montrer que $x+y=d$ et que d est impair. En posant $d = 2n+1$ déterminer a et b en fonction de n .
- On suppose que $(x+y) \wedge (x-y) = 2$. Déterminer a et b en fonction de d .
- Déterminer a et b sachant que le reste de la division de a par b est 137.

I-27 ☹ ☹ (complément : bases de numérations). Soit une base $x > 2$ et deux entiers a et b tels que $0 < a < b < x$. On note dans cette base $n = \overline{ab}$ et $n' = \overline{ba}$, et on dit que n est un codiviseur en base x si n' est un multiple de n , c'est-à-dire s'il existe k tel que $n' = kn$.

- On suppose connus x, a, b . Montrer que nécessairement $2 \leq k < x-1$. On pose donc (pourquoi ?) $r = b - ak$. Montrer que $1 \leq r \leq k-1$, $bk = rx + a$, $rx = (k^2 - 1)a + kr$.
- Réciproquement montrer que les formules précédentes permettent de déterminer un codiviseur.
- Montrer que $k+1$ et $x+1$ ne peuvent être premiers entre eux, et qu'en particulier, il n'y a pas de codiviseur si $x+1$ est premier. Établir que $2k \leq x$, et que x est au moins égal à 5.
- On choisit x tel que $x+1 = uv$ ($u > 1$ et $v > 1$) et $r = k-1$. Montrer qu'il y a au moins un codiviseur. Déterminer tous les codiviseurs de la base 17.

I-28 Étude de $a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$, a et b dans $\mathbb{N}$ ☹

Soient deux entiers a et b strictement supérieurs à 1, avec $a > b$. On appelle E l'ensemble des entiers x non nuls qui peuvent s'écrire $x = am + bn$, où m et n sont des entiers naturels, et F l'ensemble $\mathbb{N}^* \setminus E = \mathbb{N}^* - E = C_{\mathbb{N}^*}^E$.

- Montrer que F est non vide.
- Montrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, F est non borné.
- On suppose que $a \wedge b = 1$. Montrer que $ab - a - b + 1$ et tous les entiers supérieurs à ce nombre sont éléments de E . En déduire que F a un plus grand élément et a pour cardinal $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

I-29 Avec Fermat ☹ ☹

Soit $a = 11\dots 122\dots 2\dots 99\dots 9$, où tout chiffre de 1 à 9 est écrit p fois, et $B = 123456789$. Montrer que si p est un nombre premier alors $A - B$ est divisible par p .

I-30 ☹ Déterminer les nombres tels qu'en supprimant n'importe quel chiffre de leur écriture décimale, le nouveau nombre obtenu soit divisible par 7.

I-31 Polynômes de Dewasme ☹

a et b étant deux entiers naturels, montrer que si $a^2 + b^2$ est divisible par $1 + ab$ le quotient k est un carré. n étant choisi, déterminer les couples $(a; b)$ pour que le quotient soit n^2 .

I-32 Le problème qui rend fou ☹

On propose à deux excellents mathématiciens de découvrir deux nombres. Pour cela on donne au premier Arthur la somme de ceux deux nombres, et au deuxième Barnabé leur produit. S'engage alors le dialogue suivant : Barnabé « je ne peux pas trouver ces nombres », Arthur « je le savais », Barnabé « alors je les connais », Arthur « alors moi aussi ».

Et vous ? Pouvez-vous trouver ces nombres ?

I-33 ☹ ☹ Étant donnés 10 nombres entre 1 et 100, on peut toujours former deux sommes égales en utilisant certains de ces nombres.

I-34 ☹ Montrer que parmi les nombres qui s'écrivent en alternant des 0 et 1, comme 10101, il y a un seul nombre premier.

I-35 Nombre de divisions dans l'algorithme d'Euclide ☹

Le but du problème est de déterminer une approximation du nombre de division nécessaire dans l'algorithme d'Euclide pour la détermination du pgcd de deux nombres a et b , avec $a > b$. Il est plus que

conseillé de faire des exercices de la partie « analyse » sur le nombre d'or et la suite de Fibonacci avant de s'attaquer à ce problème.

La suite de Fibonacci que l'on utilisera dans cette partie est définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$.

1. Montrez par récurrence que w_{n+1} et w_n sont premiers entre eux.
2. Montrez que $w_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (φ est le nombre d'or).
3. Dans cette question, on suppose que N est un entier fixé. Le but de la question est de déterminer le plus grand entier M tel que w_M soit le plus grand terme de la suite de Fibonacci inférieur ou égal à 10^N .
 - a. Montrez que pour tout n entier on a $-1 < \ln\left(1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n\right) < 1$.
 - b. Montrez que $M \leq \frac{N \ln 10 + \ln \sqrt{5} + 1}{\ln \varphi}$. On a donc un majorant de M .

Remarque : on obtient aussi très (?) facilement (??) un minorant. Autre remarque : très rapidement, on a $\ln\left(1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n\right) \approx 0$, on pourrait donc prendre $M = \text{ENT}\left(\frac{N \ln 10 - \ln \sqrt{5}}{\ln \varphi}\right)$.

La suite de Fibonacci que l'on utilisera dans cette partie est définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

4. Dans l'algorithme d'Euclide, on note :

$$\begin{aligned} a &= bq_n + v_n \\ b &= v_n q_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n &= v_{n-1} q_{n-2} + v_{n-2} \\ &\vdots \\ v_2 &= v_1 q_0 + v_0 \\ v_1 &= v_0 q_{\text{final}} \end{aligned}$$
 où v_0 est le dernier reste non nul.
 - a. Démontrez que pour tout k , $v_{k+2} \geq v_{k+1} + v_k$.
 - b. Démontrez par récurrence que $v_{k+1} \geq u_{k+1}$ et $v_k \geq u_k$.
 - c. Démontrez que si a et b sont inférieurs ou égaux à u_M , où M est un entier fixé, alors le nombre de divisions pour calculer $\text{pgcd}(a; b)$ est inférieur ou égal à $M + 1$ (nombre de termes de la suite jusqu'à u_M).
5. On suppose maintenant que a et b sont inférieurs à 10^N , avec N fixé. Donnez un majorant du nombre de divisions à effectuer. Application avec a et b inférieurs à 1 milliard (vérification possible sur tableur).

I-36 Fractions continues.

1. Étant donné un réel positif x non entier, montrer qu'il existe un couple unique $(a_0; x_1) \in \mathbb{N} \times]1; +\infty[$ tel que $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$, et ainsi de proche en proche $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$. Montrer que si x est rationnel, il existe n tel que x_n soit entier (penser à l'algorithme d'Euclide).

On suppose dans la suite que x est irrationnel. L'opération est alors illimitée et on dit qu'on a développé x en fraction continue.

On appelle alors $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ le rationnel obtenu en arrêtant l'opération à a_n :

$$r_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

2. Montrer par récurrence que $x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}$, avec $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$. On posera $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 0$, $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$ (pourquoi ?).
3. Montrer que $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$. En déduire que r_n est irréductible et que x est compris entre r_n et r_{n-1} .
4. Montrer que la suite (q_n) est strictement croissante, que $q_n > 2q_{n-2}$. Donner la limite de q_n en $+\infty$, et montrer que $r_n - x$ tend vers 0.
5. Déterminer a_n pour $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x = 1 + \sqrt{2}$

ANALYSE

II-1 Le peloton du tour de France fait 100 mètres de long et roule à vitesse constante v . Une moto roulant à vitesse constante V part du dernier coureur, remonte jusqu'au premier, fait demi tour instantanément et repart tout aussi instantanément à la même vitesse constante V , puis croise le dernier coureur du peloton au moment où celui-ci a parcouru 100 mètres depuis que la moto l'a quitté. Quelle distance a parcouru la moto entre les deux moments où elle côtoie le dernier coureur ?

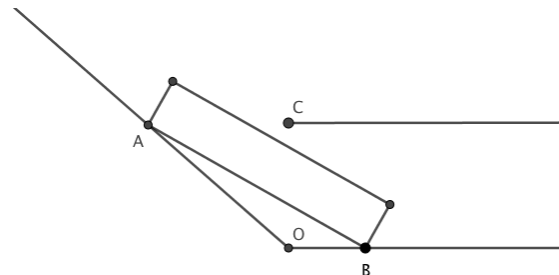
II-2 Le train sifflera trois fois.

Sur une voie ferrée rectiligne, un train traverse un passage à niveau avant d'entrer en gare, et donne un coup de sifflet du passage à niveau jusqu'au-delà de la gare. Monsieur Machin, Cheminot, a remarqué que la durée du coup de sifflet lui paraissait plus courte de 1,5 secondes quand il travaillait au-delà de la gare que quand il était avant le passage à niveau où, par contre, elle lui paraissait plus courte d'une seconde que quand il était à la gare. Quelle est la distance entre la gare et la passage à niveau ? Quelle est la distance parcourue par le train pendant son coup de sifflet ?

II-3 ☉ (trigo) Une caisse cubique de 70 centimètre de côté est posée contre un mur. On appuie contre le mur une échelle de 2,5 mètres qui est contact avec le mur. A quelle hauteur maximale l'échelle peut-elle s'appuyer sur le mur ?

II-4 ☉☉ (trigo) Le rectangle de côtés 5 et 1 doit, en glissant en A et B entre les deux demi-droites parallèles d'origine O et C.

On donne $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Quelle doit être la distance OC ?



II-5 ☉ Un escalier roulant monte à vitesse constante. Léon monte 20 marches et arrive en 15 secondes ; Suzy en montant 22 marches ne met que 12 secondes, et Gaston qui descend met 18 secondes. Combien a-t-il descendu de marches ?

II-6 ☼ L'escalier du pharaon.

Un escalier comporte 9 marches de hauteurs respectives (en partant du bas $1 - 1,5 - 0,7 - 1 - 1,2 - 1 - 0,8 - 1,2 - 1$ et de profondeurs $3 - 4 - 1 - 5 - 3 - 4 - 4 - 3$ (la dernière est le palier). Le pharaon décide de le transformer en un escalier de 4 marches en minimisant le volume à ajouter. Donner les dimensions des nouvelles marches.

II-7 ☼ Le Petit Chaperon Rouge part de chez elle à 8h00, arrive chez sa grand-mère dans l'après-midi (sans rencontrer personne). Le lendemain, après un bon civet de loup, elle repart de chez sa grand-mère à 8h00, et arrive chez elle tranquillement, en empruntant le même chemin en sens inverse. Montrer qu'il existe un endroit du chemin par lequel elle est passée exactement à la même heure les deux jours.

II-8 ☺ ☺ (et éventuellement ☺) On choisit un nombre réel x et un entier n . Montrer que parmi les nombres $x, 2x, 3x, \dots, (n-1)x$, il y en a au moins un qui est à moins de $\frac{1}{n}$ d'un entier (cet exercice est une bonne occasion d'apprendre le principe des tiroirs de Dirichlet : si on a $n+1$ chaussettes et n tiroirs, alors au moins un tiroir comporte deux chaussettes).

II-9 ☺ ☺ Flocon de Von Koch

La courbe K_0 est un triangle équilatéral de côté 1 et d'aire s . On définit par récurrence une famille de courbes K_n de la manière suivante : chaque courbe est obtenue à partir de la précédente en remplaçant chaque segment par une ligne brisée, en construisant un triangle équilatéral sur le tiers central du segment. Déterminer le périmètre et l'aire de K_n , ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$. Conclusion ?

II-10 ☺ ☺ Nombre d'or 1.

Montrer que $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}}$.

On pourra montrer que $v_{n+1} - \varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2v_n}(\varphi - v_n)$, d'où $|v_{n+1} - \varphi| \leq 0,7|v_n - \varphi|$, où $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ et $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

II-11 ☺ Fibonacci.

On considère la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

À l'aide d'un outil de calcul (Python, si vous n'en avez jamais fait vous pouvez vous inspirer du notebook sur les suites http://nbviewer.jupyter.org/url/www.maths-info-lycee.fr/notebooks/ts_algorithmique.ipynb, ou bien tableur, calculatrice), calculer les 100 premiers termes de la suite. Que conjecture-t-on ?

Soient $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Vérifier que φ et ψ sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. En déduire que l'on a : $u_n = \varphi^n$.

Conclure sur la validité des conjectures.

II-12 Fibonacci 2.

a. On cherche de combien de façons f_n peut-on remplir un tonneau de n litres avec un pot de 1 litre et 1 pot de 2 litres ? Le sens du « nombre de façons » fait intervenir l'ordre ; ainsi il y a trois façons de remplir un tonneau de 3 litres : 1-2, 1-1-1, 2-1. On prendra $f_0 = 1$ en pensant qu'il n'y a qu'une seule façon de remplir un tonneau déjà plein, c'est de ne rien faire. Justifier que $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

De telles suites, définies par leurs 2 premiers termes et cette relation de récurrence s'appellent suites de Fibonacci, du nom de celui qui les a caractérisé par le nombre d'or (vers 1200).

b. Quelle relation de récurrence vérifie $q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$? En déduire la convergence de la suite q_n (on peut faire l'exercice II-10 !)

c. Montrer que les suites $u_n = \varphi^n$ et $v_n = \psi^n$ sont des suites de Fibonacci. En déduire que toute suite s'écrivant $u_n = a\varphi^n + b\psi^n$ où a et b sont des constantes fixées, est une suite de Fibonacci.

Montrer maintenant la réciproque : toute suite u_n de Fibonacci s'écrit sous la forme $u_n = a\varphi^n + b\psi^n$. Pour cela on déterminera a et b en fonction de v_0 et de v_1 . Donner les valeurs de a et b dans le cas précis de la suite étudiée au 1.

II-13 Nombre d'or 2.

Résoudre l'équation $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}}$ (n dénominateurs superposés).

II-14 ☉ Nombre d'or 3.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2u_n - 1}$.

Montrer que (u_n) converge vers le nombre d'or $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Montrer que $u_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{2}(u_n - \varphi)^2$, en déduire que u_8 est une approximation de φ à au moins 10^{-153} .

II-15 Nombre d'or 4.

On définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} z_0 = 1 + i \\ z_{n+1} = 1 + \frac{1}{z_n} \end{cases}$.

Partie A : étude directe (et incomplète)

1. Conjecturer la limite de la suite (z_n) (On pourra utiliser un tableur, une calculatrice ou un programme, Python ou calculatrice)

Remarque : z_0 s'écrit `complex(1, 1)` en Python, on dispose de `phase(z)`, avec en première ligne du programme `from cmath import *`, pour calculer une mesure de l'argument.

2. On pose $z_n = x_n + iy_n$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n > 1$.

En déduire que la suite $(|y_n|)$ est décroissante. Conclure sur la convergence de la suite $(|y_n|)$. Calculer ensuite sa limite.

3. On admet que la suite (x_n) converge. En déduire la limite de la suite (z_n) .

Remarque : on peut montrer par récurrence que $1 \leq x_n \leq 2$ (pourquoi a-t-on $0 \leq y_n^2 \leq 1$?), il est bien plus difficile de montrer que la suite (x_n) est croissante.

Partie B : étude en passant par Fibonacci

On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Soit $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ la suite des quotients de deux termes consécutifs. Montrer que cette suite vérifie

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}, \text{ donner son premier terme.}$$

2. On admet que v_n admet une limite L . Vérifier que $L = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or, pour la preuve relativement simple de la limite faire par exemple exercice II-10).

3. Montrer que $\frac{u_{2n+1}^2 + 1}{u_{2n}} = u_{2n+2}$, en déduire que $z_n = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} + \frac{(-1)^n}{u_{2n}}i$. Conclure sur la convergence de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II-16 ☉ Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n = u_n - \sqrt{n}$. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

En déduire par itération que la suite (u_n) diverge, que la suite (v_n) est décroissante et convergente.

II-17 Série harmonique et Constante d'Euler-Mascheroni (voir aussi exercice I-16 sur le même thème, du côté arithmétique).

1. On considère la série harmonique $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. En regroupant des termes consécutifs, montrer que $u_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n$. En déduire que la série diverge vers $+\infty$.

2. On considère la série harmonique alternée $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

a. Calculer $\int_0^1 (-t)^n dt$, où $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$.

c. En déduire la limite de la série harmonique alternée.

3. On vient de voir au 1 que la série harmonique diverge. On sait également que la suite $(\ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. Comparons les deux.

Montrer que pour tout entier $n > 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que la suite (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et que ces deux suites ont la même limite γ appartenant à $]0;1[$.

Remarque : On en conclut que les deux suites (série harmonique et $(\ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$) ont la même « vitesse de convergence ».

II-18 ☉ ☉ On pose $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3u_n^2 + 1}$. Montrer que u_n est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II-19 ☉ ☉ a est un entier impair. On pose $u_0 = b$ entier positif, et si u_n est pair, alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, alors que si u_n est impair, $u_{n+1} = u_n + a$. Montrer qu'il existe p tel que $u_p \leq a$, et que u_n est périodique à partir du rang p .

II-20 Algorithme de Babylone. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$. Conclure sur la convergence de la suite, puis déterminer la limite L de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. D'après la calculatrice, et un peu d'intuition, à partir de quel rang a-t-on une valeur approchée de L à $3 \cdot 10^{-6}$ près ? à $2 \cdot 10^{-12}$ près ? à 10^{-48} près ?

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} - L}{(u_n - L)^2}$. En déduire que $|u_{n+1} - L| = \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - L|^2$. Si u_n est une valeur approchée de L à 10^{-k} , que peut-on dire sur la précision de u_{n+1} en tant que valeur approchée de L ?

II-21 Simplifier $\frac{1}{2} \left[\sqrt[5]{76 \left(\sqrt[3]{1+2\frac{\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{1-2\frac{\sqrt{21}}{9}} \right) + 44\sqrt[3]{6+11\frac{\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{6-11\frac{\sqrt{21}}{9}}} + \sqrt[5]{76 \left(\sqrt[3]{1+2\frac{\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{1-2\frac{\sqrt{21}}{9}} \right) - 44\sqrt[3]{6+11\frac{\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{6-11\frac{\sqrt{21}}{9}}} \right]$

II-22 Étudier rapidement la fonction $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$. On note D l'ensemble de définition de f et $I =]-1; 1[$.

On considère $a \in D$ et l'équation $f(x) = f(a)$. Montrer que cette équation a trois solutions, dont une et une seule dans D . Déterminer algébriquement les trois solutions. Représenter graphiquement la fonction g qui à a associe celle des solutions qui est dans I .

II-23 Le paravent

Un paravent est constitué de deux parties MA et MB articulées en O, de 1 mètre chacune. On se place ce paravent dans le coin (angle droit) BOA d'une pièce, M étant sur la bissectrice. On cherche à obtenir une surface OAMB maximale.

Étudier ce problème :

- En prenant comme inconnue l'abscisse x de M dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- En prenant comme inconnue l'angle $\theta = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{OB})$.

II-24 ☺ ☹ (complément : asymptotes obliques) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f : x \mapsto x/4 + 1 + \sqrt{|x^2 - 4x|}$. On note C_f sa courbe représentative.

Étudier f en séparant deux cas suivant les valeurs de x , ne pas oublier la dérivabilité en 0 et 4 (on montrera l'existence de tangentes verticales)

Pour trouver les équations des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ (on pourra utiliser la méthode suivante :

si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \dots$ à conclure).

Étudier l'intersection de C_f avec ses asymptotes (pour ceux qui n'ont pas peur des calculs).

II-25 Un amour de fonction.

Étudier les fonctions $u(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $v(x) = \sqrt{2|x|-x^2}$, et en particulier leur dérivabilité en 0 et 1. En déduire l'étude de $v+u$ et $v-u$. Quelle est l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de ces deux dernières fonctions ?

II-26 ☺ ☹ Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sqrt{-\ln x}$, et préciser les tangentes aux extrémités de son domaine de définition.

II-27 (complément : fonctions puissances) On pose $f_a(x) = x^a \exp(-x^2)$, où $a \in \mathbb{R}^+$. Étudier les fonctions f_a en précisant selon a la tangente en O. Déterminer une fonction g dont la courbe contient tous les points d'ordonnée maximale de toutes les courbes C_a . Étudier g et représenter sur un même graphique la courbe de g et celles de $f_{1/2}$ et $f_{9/2}$.

II-28 ☺ Donner les 100 premiers chiffres après la virgule de $\frac{2e^{2001} - e^{1789}}{e^{2001} - e^{1789}}$. On pourra utiliser la calculatrice (non testé sur TI-Nspire, peut-être qu'on obtient quasi directement la réponse).

II-29 La tractrice ☹

Soient les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, et tangente hyperbolique définies respectivement par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

Calculer $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)$, $\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$ et $\text{ch}(x) \times \text{sh}(x)$.

Étudier rapidement la fonction ch , soit C sa courbe représentative.

Soit M un point de C d'abscisse $a > 0$, m sa projection sur l'axe des abscisses, et P la projection orthogonale de m sur la tangente Δ en M à la courbe C . Écrire l'équation de Δ et déterminer les coordonnées de P en fonction de a . Quelle est la distance mP ?

On pose $f(t) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right) - \sqrt{1-t^2}$. Étudier la fonction f (on admettra que la courbe Γ de f a une tangente horizontale en 1). Montrer que les coordonnées x, y de P vérifient la relation $x = f(y)$, et en déduire à partir de Γ l'ensemble des points P quand M décrit C . Montrer que (mP) est tangente à cet ensemble.

II-30 ☺ (complément : asymptotes obliques) On considère la fonction f définie par $f(t) = t - \ln|t|$. Étudier succinctement f et en déduire l'existence d'un unique réel t_0 tel que $f(t_0) = 0$. Donner un encadrement de t_0 à 10^{-2} , étudier le signe de $f(t)$ suivant les valeurs de t .

Soit maintenant la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| + x - 1$. Étudier les limites de g en 1 et à l'infini.

Montrer que g a une limite finie en 0. Si on prolonge g en prenant cette limite comme valeur de $g(0)$, quelle est alors la tangente en 0 à la courbe représentative de g ?

Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe de g .

Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = f(t)$ en posant $t = \frac{x}{x-1}$. En déduire alors les variations de g (on appellera x_0 la valeur annulant g').

Exprimer $g(x_0)$ en fonction de t_0 et en déduire un encadrement de $g(x_0)$.

II-31 ☼ Moyenne généralisée

a. Soient α et β deux réels strictement positifs tels que $\alpha + \beta = 1$, b un réel positif et h la fonction définie par $h(x) = \alpha x + \beta x - x^\alpha b^\beta$. En étudiant les variations de h montrer que pour tout $a > 0$ $\alpha a + \beta b \geq a^\alpha b^\beta$, l'égalité n'ayant lieu que si $a = b$.

b. Si $a_1, \dots, a_p$ et $b_1, \dots, b_p$ sont deux suites de réels strictement positifs montrer l'inégalité

$$(H) \sum_{i=1}^p a_i^\alpha b_i^\beta \leq \left(\sum_{i=1}^p a_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^p b_i \right)^\beta \quad (\text{indice})$$

c. $c_1, \dots, c_p$ étant une suite de réels positifs de somme 1 et $d_1, \dots, d_p$ une suite strictement croissante de

réels positifs, on pose $m(x) = \left(\sum_{i=1}^p c_i d_i^x \right)^{\frac{1}{x}}$. Déterminer les limites de $m(x)$ quand x tend vers 0, $+\infty$, $-\infty$.

La limite en 0 servira de prolongement par continuité et sera notée $m(0)$. [Indice](#)

d. On suppose $0 < x < y$, montrer en utilisant (H) que $m(x)^x < m(y)^x$; montrer une relation analogue en supposant que x et y sont négatifs. En déduire que m est croissante sur $\mathbb{R}$.

En comparant $m(-1)$, $m(0)$, $m(1)$, $m(2)$ on obtient les inégalités usuelles sur les moyennes harmoniques, géométriques, arithmétiques et quadratiques.

II-32 ☼ sans indications (mais très beau). ☺ avec les indications, on peut mélanger les deux méthodes éventuellement.

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}_*^+$ vérifiant $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x)$ pour tout couple $(x; y)$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. [Indices](#)

II-33 Montrer que l'équation $-1 + x + x^2 + \dots + x^n = 0$ a pour $n > 2$ une solution positive unique u_n . Montrer que la suite (u_n) est décroissante, convergente, et a pour limite 0,5.

II-34 Préliminaire : lorsqu'elle existe, on appelle fonction réciproque de la fonction $f : I \rightarrow J$ la fonction notée $f^{-1} : J \rightarrow I$ telle que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$, où id est la fonction identité : $\text{id}(x) = x$. On admet l'existence des fonctions réciproques lorsque f est une bijection. On rappelle également que $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$.

On considère la fonction tangente, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, et notée ici $\varphi(x) = \tan x$. On pose pour tout réel x

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

1. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de φ , et les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=1$ (c'est bien y et non x).
2. Calculer la dérivée de $f \circ \varphi$ et en déduire $f(0), f(1), f(\sqrt{3})$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(1+t^2) dt$.
4. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que $\frac{1}{1+x^2} \leq g(x) \leq 1$ et en déduire la limite de g en 0. Déterminer la limite de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \ln x$.

II-35 ☉ Fonction moyenne. On rappelle que $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f (fonctions composées)

Pour toute fonction f monotone, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on définit la fonction moyenne de f sur $[0; x]$ par $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = f(0)$
2. Montrer que f est monotone de même sens que F .
3. À l'aide d'une intégration par parties sur $\int_0^x t^{n+1} f^{(n+1)}(t) dt$, montrer que $F^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n)}(t) dt$

II-36 Intégrales de Bessel (fonctions composées, fonctions réciproques cf. II 34)

On pose $f(t) = \frac{1}{2t^2 + 2t + 1}$, définie sur $\mathbb{R}$, F est une primitive de f , et $g(x) = F\left(\frac{1 + \tan x}{2}\right)$.

1. Calculer $g'(x)$, en déduire $g(x)$ puis $\int_0^1 f(t) dt$.

On pose alors $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$ et $u_n = I_{n,n}$.

2. Montrer à l'aide d'un encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I_{p+1,q+1}$ et $I_{p+2,q}$.

4. En déduire que $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Comparer avec la valeur de u_n obtenue directement après développement de $(1-t)^n$ par la formule du binôme (on ne cherchera pas à réduire la somme obtenue).

5. Montrer que $\int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En intégrant

$$f(t) - 1 - \sum_{k=1}^n 2^k t^k (1-t)^k, \text{ déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n 2^k u_k.$$

II-37 Intégrales de Wallis et première formule de Stirling (de première espèce).

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot dx$ (intégrale de Wallis).

1. Calculer I_0 et I_1 . Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Par une intégration par parties, montrer que $n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2}$.
3. En déduire :

a. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$;

b. que $I_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ et $I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

4. On pose $u_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$. Le but de cette partie est de montrer que (u_n) est convergente.

a. Résultats préliminaires.

i. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad -\frac{2}{3}x^3 \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \leq 0$.

ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

(d'où $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2$ bien sûr).

iii. Montrer que $-\frac{2}{3(2n+1)^2} \geq -\frac{1}{6n^2}$.

b. Soit $v_n = \ln(u_n)$.

i. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$. En déduire que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(2n+1) \cdot \ln\left(\frac{1 - \frac{1}{2n+1}}{1 + \frac{1}{2n+1}}\right)$.

ii. Montrer que $-\frac{1}{6n^2} \leq v_{n+1} - v_n \leq 0$. Conclusion ?

iii. Montrer que $v_n \geq 1 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2}\right)$.

iv. En déduire que les suites (v_n) et (u_n) convergent. On appellera L la limite de (u_n)

5. Déterminer la limite L de la suite (u_n) en comparant $\frac{(u_n)^2}{u_{2n}}$ et $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$. En déduire un équivalent de la factorielle en $+\infty$, c'est à dire une fonction f telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{f(n)} = 1$. On écrira alors $n! \sim f(n)$ (formule de Stirling).

II-38 ☉ ☉ Somme des carrés des inverses des entiers (bac 1981).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite telle que $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t^2} dt \leq u_n - \frac{1}{n^2}$.

En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente, encadrer sa limite.

2. On note $I_n = \int_0^\pi t^2 \cos(nt) \cdot dt$ et $K_n = \int_0^\pi t^2 \sin(nt) \cdot dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

À l'aide d'intégration(s) par parties, calculer I_n et K_n en fonction de n .

En déduire que $\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt$

3. Soit n un entier naturel non nul, et t un réel de l'intervalle $[0; \pi]$.

Calculer en fonction de n et t la somme $\sum_{p=1}^n e^{ipt}$.

En déduire que : si $t \in]0; \pi]$ alors $\sum_{p=1}^n \cos(pt) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right]}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$

Si $t = 0$ alors $\sum_{p=1}^n \cos(pt) = n$

4. Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt$.

5. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{2 \sin \frac{t}{2}}$, définie sur $]0; \pi]$ peut être prolongée par continuité en 0.

Montrer que la fonction g ainsi définie sur $[0; \pi]$ est positive et majorée sur $[0; \pi]$.

Démontrer que la fonction g est dérivable sur $]0; \pi]$ et que sa fonction dérivée est continue sur $]0; \pi]$.

6. Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\pi^2}{6} - u_n = \int_0^\pi g(t) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] dt$.

7. Soit α un nombre réel strictement compris entre 0 et π . Soit M un majorant de g sur $[0; \pi]$. Démontrez

que $\left| \int_0^\pi g(t) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] dt \right| \leq \frac{2M}{2n+1}$ (variante si vous trouvez cela plus facile $\leq M \times \alpha$)

Démontrez que $\int_\alpha^\pi g(t) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] dt = 2g(\alpha) \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_\alpha^\pi g'(t) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] dt$

8. Utiliser la question 5 pour montrer qu'il existe un nombre réel A strictement positif tel que pour tout n

de $\mathbb{N}^*$: $\left| \int_\alpha^\pi g'(t) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] dt \right| \leq A(\pi - \alpha)$.

9. Déduire des résultats précédents que $\left| u_n - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq \frac{4M + 2A\pi}{2n+1}$ (avec la variante du 7 on trouve

$\leq \frac{M}{n} + \frac{2M}{2n+1} + \frac{2A\pi}{2n+1}$)

Conclure sur la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

II-39 ☼ Montrer que si a, b et c sont dans $[0; 1]$ alors $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$.

II-40 ☼ Bac 78 (dérivée des fonctions composées, intégration par parties, très bel exercice)

Soit $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) dt$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Comparer $f(x)$ et $\exp(-x)$, et déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. On définit la fonction φ par $f(x) = f(a) + (x-a) \left[\varphi(x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt \right]$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$. En déduire que f est dérivable, et la valeur de $f'(x)$ (on pourra utiliser cette définition pour f dérivable : pour tout h tel que $a+h \in I$, on peut écrire $f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot \varepsilon(h)$, où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$; $f'(a)$ est appelé nombre dérivé de f en a).

3. Soit P une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$, et soit Q la fonction définie par $Q(t) = P(x \tan(t))$

Montrer que Q est dérivable et que $\int_0^x e^{-t^2} dt = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-x^2 \tan^2 t)}{\cos^2 t} dt$.

4. Soit $g(x) = f(x^2)$. Montrer que $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

5. On pose $h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$. Calculer $h'(x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

II-41 ☠

a est un paramètre réel, $g_a(x) = a + \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x} + \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ et $f_a(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{a + \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt}$.

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (on peut faire le lien avec l'exercice II-40, ainsi qu'avec le cours sur la loi normale)

1. Comparer $g_{-a}(-x)$ et $g_a(x)$, $f_{-a}(-x)$ et $f_a(x)$.

2. Étudier les variations de g_a et de f_a pour $a < 0$, en séparant pour f_a les cas $a < -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $a > -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

PROBABILITÉS ET DÉNOMBREMENTS

Remarque : $C_n^p = \binom{n}{p}$ (coefficients binomiaux ou combinaisons).

III-1 Zoo au logis : Odile a plusieurs sortes d'animaux dont exactement 2 ne sont pas des mammifères, 3 ne sont pas des chiens, 4 ne sont pas des chats, 5 ne sont pas des perroquets. Combien Odile a-t-elle de chats ? de chiens ?

III-2 En entrant dans un pub après un match de rugby France-Écosse, j'y trouvais : 8 femmes, 82 personnes ivres, 2 hommes en kilt n'ayant pas bu, 4 femmes en pantalon, 6 personnes ivres en pantalon, 77 hommes en kilt, 19 personnes en pantalon, et 1 femme ivre en pantalon. Combien étions-nous ?

III-3 ☹ ☹ Dans un damier carré de $n \times n$ combien y-a-t-il de carrés ? de rectangles ? Dans un triangle équilatéral de côté n où l'on a tracé toutes les unités parallèles aux côtés, combien y-a-t-il de parallélogrammes ?

III-4 ☹ ☹ Les problèmes du facteur (arrangements, combinaisons)

a. Un premier facteur, stagiaire, arrive devant un immeuble dont l'entrée est dépendante d'un digicode à quatre chiffres non nuls. Il sait que ces 4 chiffres sont différents. Combien y-a-t-il de codes différents ?

Une fois entré dans l'immeuble, il trouve 10 boîtes aux lettres dans lesquelles il doit répartir 7 prospectus différents. Combien y-a-t-il de répartitions s'il ne doit mettre qu'un prospectus par boîte ? S'il peut en mettre plusieurs par boîte ?

- b. Un deuxième facteur, plus expérimenté, se trouve confronté aux mêmes problèmes, sauf que le digicode est à 5 chiffres, qui sont dans un ordre croissant (on peut faire 2 études : strictement croissant ou au sens large). Il a 7 prospectus identiques, et il peut en mettre plusieurs par boîte. Répondre aux mêmes questions.

III-5 ☉ (sur la fin) ⚡ Le problème du scrutin.

A 1°) Identifier les coefficients binomiaux de x^4 dans $(1+x)^8$ et dans $(1+x)^4(1+x)^4$

2°) Identifier les coefficients binomiaux de x^4 dans $(1+x)^8$ et dans $(1+x)^3(1+x)^5$. Vérifier numériquement la formule obtenue à partir de 1°) et 2°).

B Un point mobile se déplace sur les lignes d'un quadrillage illimité d'origine O. A l'instant $t=0$ il se trouve à l'origine. A chaque unité de temps, il se déplace d'une unité de longueur, vers la droite ou bien vers le haut.

1°) Calculer le nombre de trajectoires reliant O à $A(a;b)$. On dit que ce sont des chemins minimaux (pourquoi "des"?). En déduire le nombre de chemins minimaux joignant $A(x_A; y_A)$ à $B(x_B; y_B)$.

2°) Le but de la question est de démontrer la relation $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2$

a/ Première méthode : calculer de deux manières le nombre de tirages de n boules dans une urne contenant n boules violettes à points verts et n boules ocre à rayures carmin.

b/ Deuxième méthode : en dénombrant le nombre de chemins minimaux joignant $O(0;0)$ à $N(n;n)$.

Remarque : la droite tracée sur le schéma n'est pas là par hasard...

3°) Par un raisonnement similaire au 2°)b/, démontrer la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad 0 \leq q \leq n+p \quad C_{n+p}^n = \sum_{k=0}^{k=q} C_q^k C_{n+p-q}^{n-k}.$$

On pourra introduire la droite d'équation $x+y=q$

Écrire la formule correspondant à $A(5; 8)$ avec la droite d'équation $x+y=5$.

C 1°) Démontrer le principe de réflexion : « étant donné une parallèle D à la première bissectrice, et deux points A et B situés du même côté de D, alors le nombre de chemins minimaux joignant A à B et coupant ou touchant D vaut le nombre de chemins minimaux joignant B au symétrique A' de A par rapport à D ».

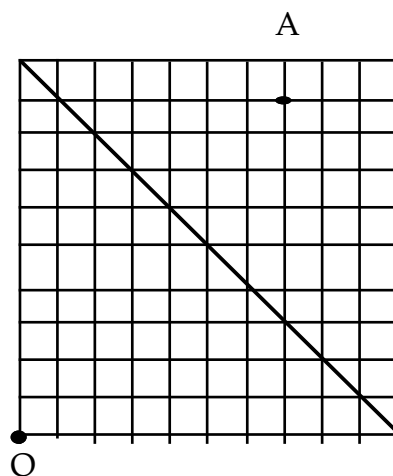
2°) Démontrer le théorème d'André (1887) : « soient p et q des entiers tels que $1 \leq p < q$. on pose $p+q=n$.

Alors les chemins minimaux joignant 0 au point $M(p;q)$ et n'ayant en commun avec la première

bissectrice que le point O sont au nombre de $\frac{q-p}{q+p} C_n^p$ »

3°) Et enfin résoudre le problème du scrutin: "étant donné un scrutin à l'issue duquel les candidats P et Q recueillent p et q voix, avec $1 \leq p < q$, quelle est la probabilité pour que Q ait constamment la majorité pendant le dépouillement?"

Remarque : on peut également voir le problème comme la modélisation de la ruine d'un joueur. S'il gagne une partie, il va vers la droite, s'il perd vers le bas. Il est ruiné quand il passe sous la droite.



III-6 Combinaisons avec répétitions.

On note Γ_n^p le nombre de façons de ranger p objets indiscernables dans n tiroirs.

1°) Calculer Γ_n^p pour $n \leq 3$ et $p \leq 5$.

2°) Modèle:



a/ Montrer alors qu'un rangement peut être considéré comme un mot de $p + n - 1$ lettres formé à l'aide de p lettres "O" (les p objets) et de $n - 1$ lettres "C" (les $n-1$ cloisons).

b/ En déduire que $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.

3°) Applications (dans chaque cas, trouver les "objets" et les "tiroirs").

a/ Déterminer le nombre de solutions de l'équation (x,y,z) de l'équation $x + y + z = 10$, où x, y et z sont des entiers naturels.

b/ Déterminer le nombre de termes après réduction de $(a + b + c + d)^5$.

III-7 Permutations avec répétitions.

Compter le nombre d'anagrammes des mots: ananas, abaca, Lucullus, Mississippi, suisses.

III-8 On dispose de p couleurs avec lesquelles on colorie au hasard n cases d'une bande de papier. Quelle est la probabilité pour que deux cases voisines soient toujours de couleur différente ?

On reprend le problème avec une couronne circulaire.

Calculer la probabilité pour que deux cases voisines soient toujours de couleur différente avec 3 cases.

Soit u_n le nombre de coloriages satisfaisants pour une couronne de n cases. Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1} , en déduire que $u_n = (p-1)^n + (-1)^n (p-1)$, puis répondre au problème.

III-9 ☺ ☯ Calculer les probabilités de deux événements A et B d'un univers Ω sachant que $P_A(B) = \frac{2}{3}$,

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{9}{11} \text{ et } P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{12}.$$

III-10 Les jours de grève, la météo nationale assure un service minimum avec deux grenouilles aux comportements indépendants, quel que soit le temps. En mai, il pleut deux jours sur cinq. Quand il va pleuvoir, chaque grenouille annonce la pluie huit fois sur 10 et elles annoncent simultanément le beau temps une fois sur vingt-cinq. Quand il va faire beau, chacune annonce le beau temps neuf fois sur dix. Les grenouilles ont également un comportement indépendant conditionnellement au beau temps.

Le 13 mai, jour de grève, elles annoncent toutes les deux qu'il va faire beau. Calculer la probabilité pour qu'il pleuve.

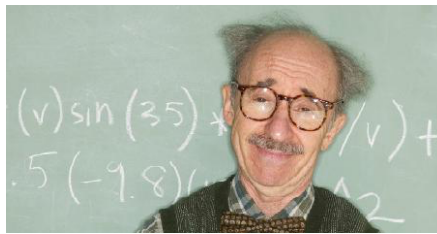
III-11 ☯ On lance trois pièces de monnaie. Montrer avec un arbre que la probabilité que toutes trois retombent du même côté, que ce soit pile ou face, est de $1/4$. Soit. Pourtant, si on lance trois pièces, il y en a forcément deux qui seront déjà du même côté ; la troisième y sera avec une chance sur deux. J'ai donc une chance sur deux que toutes trois tombent du même côté. Expliquer l'erreur de raisonnement.

III-12 Le Bon, la Brute et le Prof de maths myope

Dans le cultissime film de Sergio Leone, le Bon, la Brute et le Truand s'affrontent lors d'un « truel » -un duel à trois-, au milieu du cimetière circulaire de Sad Hill. Pour la petite histoire, ce cimetière était un décor, qui a été reconstruit grâce à un crowdfunding : les croix portent désormais les noms des donateurs.

On va remplacer le Truand par le Prof : un professeur de mathématiques, myope de surcroît.





Lors de ce duel, chacun tire à son tour sur l'adversaire de son choix. Celui qui tire en premier est tiré au hasard. Le Bon touche sa cible à tous les coups. La Brute touche son adversaire 9 fois sur 10. Et le Prof, étant myope, n'atteint sa cible qu'une fois sur deux. Sachant que le Bon et la Brute ont tout intérêt à tirer l'un sur l'autre puisque le Prof n'est pas dangereux, expliquer pourquoi ce dernier décide de tirer en l'air tant qu'il a deux adversaires, en calculant sa probabilité de survie, ainsi que celles du Bon et de la Brute. Compléter éventuellement en calculant les probabilités de survie de chacun avec la stratégie qui consisterait à tirer sur l'adversaire le plus dangereux y compris pour le Prof (non testé par votre honoré professeur).
« Tu vois, le monde se divise en deux catégories : ceux qui ont un pistolet chargé et ceux qui creusent. Toi, tu creuses. » Le Bon

III-13 Les variables aléatoires du garagiste (complément : variables aléatoires indépendantes, fonction de répartition).

Un garagiste a deux voitures qu'il peut prêter à ses clients. Chacune de ces voitures est indisponible une fois sur cinq de manière indépendante. X est la variable aléatoire égale au nombre de voitures disponibles, Y est le nombre de clients demandeurs, et Z le nombre de voitures prêtées. On sait que $P(Y=0)=0,3$, $P(Y=1)=0,5$. Déterminer la fonction de répartition de Z .

III-14 Élections ☺

Considérons un triangle équilatéral ABC et un point M intérieur au triangle.

1. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est indépendante de M .
2. Considérons a, b, c les pourcentages de voix obtenus par trois candidats lors d'une élection. La somme des pourcentages étant 1, il existe un unique point M intérieur au triangle équilatéral de hauteur unité, tel que M soit aux distances a, b, c des côtés. Cette élection doit désigner au scrutin proportionnel 5 délégués. Les points correspondants pour chaque liste à un nombre exact d'élus sont les sommets de 25 triangles équilatéraux. Montrer que si l'élection se fait au plus fort reste, l'intérieur de chaque petit triangle se partage en 3 zones par les segments joignant le centre du triangle au milieu des côtés, et que le triangle initial se partage en un pavage hexagonal.
3. En déduire alors qu'une liste peut perdre un élu tout en gagnant des voix. Déterminer la probabilité de chaque type de résultats.

COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Remarque préliminaire : pour de nombreux exercices utilisant les complexes en géométrie, il est utile de connaître les expressions complexes des transformations usuelles.

- Rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
- Translation de vecteur $\vec{u}$: $z' = z + z_{\vec{u}}$.
- Homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k : $z' - \omega = k(z - \omega)$
- Similitude de centre Ω d'affixe ω , d'angle θ et de rapport k : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$. Une similitude est une composée de rotation et d'homothétie de rapport positif. Utile pour, par exemple, un triangle rectangle isocèle, qu'on peut obtenir avec une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

IV-1 ⚡ On considère un triangle équilatéral ABA' , O le milieu du segment $[AA']$, et un repère orthonormal d'origine O dans lequel B a pour affixe i . Les bissectrices du repère coupent (AB) et $(A'B)$ en C et C' respectivement.

Montrer que si C a pour affixe c , alors C' a pour affixe ic , et que $c' = ce^{-i\frac{\pi}{3}} + ie^{i\frac{\pi}{3}}$. En comparant les deux expressions déterminer c sous forme algébrique et trigonométrique.

IV-2 ☺ La droite de Simpson

Soit P un point d'affixe p , soit Γ le cercle de diamètre $[OP]$. A , B et C sont trois points du cercle Γ , d'affixes respectives a , b et c . On désigne par A' , B' et C' les points d'affixes respectives

$$a' = \frac{bc}{p}, b' = \frac{ca}{p}, c' = \frac{ab}{p}.$$

1. Que peut-on dire de $\frac{p-a}{a}$?
2. Montrer que A' est la projection orthogonale de O sur (BC) (idem pour B' et C').
3. Montrer que A' , B' et C' sont alignés.

IV-3 Le théorème de Johnson.

On considère trois cercles C_1 , C_2 et C_3 de centres P , Q et R , et même rayon ρ , ayant un point commun O . C_2 et C_3 se recoupent en A , C_3 et C_1 en B , C_1 et C_2 en C . On appelle Ω le centre du cercle Γ circonscrit à ABC , G et G' les centres de gravité des triangles ABC et PQR .

On choisit O comme origine et on appelle p , q , r les affixes respectives de P , Q et R (et de même pour les autres points).

1. Déterminer les affixes de A , B et C .
2. Montrer que $p+q+r$ est l'affixe de W .
3. En déduire que :
 - a. ABC et PQR sont symétriques par rapport au milieu S de $[O\Omega]$.
 - b. Γ a pour rayon ρ
4. On pose $z = \frac{p+r}{p-r}$. Montrer que z est imaginaire, que $z = \frac{b}{c-a}$. En déduire que Ω est l'orthocentre de PQR et O celui de ABC .

IV-4 Soit φ le nombre d'or, solution positive de $\varphi^2 = \varphi + 1$.

1. Montrer que $\varphi^{n+2} = u_{n+1}\varphi + u_n$, où (u_n) est la suite de Fibonacci vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
2. Soit $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos \alpha = \frac{1}{2\varphi}$. Calculer $\cos 5\alpha$ (on pourra utiliser la forme exponentielle des complexes, ainsi que les résultats du 1). En déduire α .

Dans la suite on appelle triangle d'or un triangle isocèle d'angle au sommet $\frac{\pi}{5}$. Si ABC est un tel triangle, avec $AB = AC$, on note (CD) et (BE) les bissectrices qui se coupent en I, où $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$, et s la similitude définie par $s(A) = C$ et $s(C) = B$.

3. Quels sont l'angle et le rapport de s (pour ceux qui n'ont jamais travaillé sur les similitudes : angle = $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB})$ et rapport = $\frac{CB}{AC}$. Cela vient de $s(A) = C$ et $s(C) = B$).

4. Montrer que $s(B) = D$ et $s(D) = I$. En déduire que si O est le centre de s , alors OADC sont cocycliques ainsi que OCIB.

Il est contre-productif d'utiliser le théorème suivant, que l'on peut néanmoins démontrer grâce à ses connaissances de 3^{ème} sur les angles inscrits : ABCD sont cocycliques ou alignés sssi $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d}$ est réel.

On définit J et K par $A = s(J)$ et $J = s(K)$.

5. Montrer que J, B et C sont alignés ainsi que K, A et C.

6. Montrer que O, B E et K sont cocycliques, que B est le centre du cercle inscrit dans AKJ, et que O est à l'intersection de (KD) et (IJ).

7. Étant donné un repère orthonormal d'origine B dans lequel C a pour affixe 1, déterminer l'expression complexe de s , et l'affixe de O.

IV-5 Exponentielle complexe.

Rappels/indices :

- $a^b = e^{b \ln a}$ pour b réel quelconque et a réel strictement positif.

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

2. Soit z un complexe avec $z = x + iy$.

On pose $Z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $|Z| = R$, $\arg(Z) = \theta$, $\left|1 + \frac{z}{n}\right| = r$, $\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \alpha$.

a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R = e^x$

b. Calculer $\tan\left(\frac{\theta}{n}\right)$ en fonction de x et y , et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \tan\left(\frac{\theta}{n}\right) = y$.

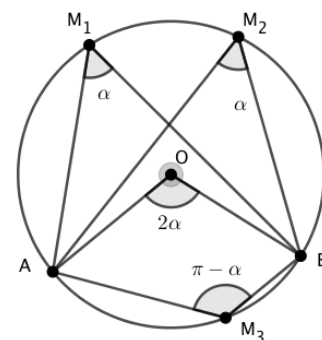
c. En déduire la limite de θ (*indice*).

d. Conclure que Z a pour limite e^z

IV-6 ☹ (dernier calcul uniquement) et ☹ L'heptagone

Indices :

- Théorème de l'angle inscrit : deux angles inscrits dans un même cercle, interceptant le même arc, ont la même mesure (s'ils sont sur le même arc) ou sont supplémentaires (s'ils sont sur les arcs complémentaires). L'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit si ce dernier est aigu, sinon il vaut $2(\pi - \alpha)$.



- Une homothétie de centre Ω et de rapport k transforme A en A' tel que : $\overrightarrow{\Omega A'} = k \overrightarrow{\Omega A}$. Un homothétie transforme un milieu en milieu, un cercle circonscrit en cercle circonscrit, un point d'intersection en point d'intersection, conserve l'orthogonalité de deux droites etc... De plus c'est une autre façon de voir Thalès : l'image d'un segment par une homothétie est un segment de longueur multipliée par $|k|$.

- Montrer que $A_{k+7} = A_k$. Calculer $L_1 = A_k A_{k+1}$ en fonction de $\sin \frac{\pi}{7}$, faire un calcul semblable pour $L_2 = A_k A_{k+2}$ et $L_3 = A_k A_{k+3}$.
- Soient A, B et C les intersections respectives de $(A_2 A_4)$ et $(A_5 A_6)$, de $(A_0 A_3)$ et $(A_2 A_4)$, de $(A_5 A_6)$ et $(A_0 A_3)$.
 - Déterminer les angles du triangle ABC.
 - Montrer que A_6, A_4, A_0 sont les milieux respectifs de $[AC]$, $[AB]$, et $[BC]$. En déduire que le cercle circonscrit au triangle ABC a pour rayon 2, et pour centre le point Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = 3\overrightarrow{OG}$, où G est le centre de gravité de ABC, et O le centre de l'heptagone.

Indices

Montrer que $(A_0 A_6)$ est la médiatrice de $[CA_2]$, $(A_4 A_6)$ celle de $[AA_3]$, $(A_0 A_4)$ celle de $[BA_5]$. Indices
 - En déduire que les droites (CA_2) , (AA_3) et (BA_5) sont les hauteurs de ABC, et que l'orthocentre H du triangle ABC est le symétrique de Ω par rapport à O (Indices pour la deuxième partie de la question).
- Montrer que B est le centre du cercle inscrit dans $A_2 A_3 A_5$ (Indices)
- Soit Γ_1 le cercle inscrit dans $A_0 A_6 C$.

Montrer que $[C\Omega]$ est un diamètre de ce cercle, en donner le rayon.

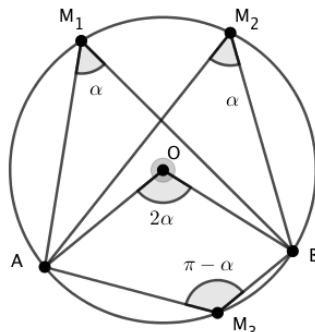
Remarque : on peut donner le rayon à l'aide d'homothéties ou d'une symétrie axiale
- Donner les longueurs du côté du triangle $B\Omega A_4$.

- b. ☹ En déduire que le point A_1 appartient à Γ . [Indices](#)

IV-7 ☪ Point de Fermat/Toricelli

Rappels :

- Théorème de l'angle inscrit : deux angles inscrits dans un même cercle, interceptant le même arc, ont la même mesure (s'ils sont sur le même arc) ou sont supplémentaires (s'ils sont sur les arcs complémentaires). L'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit si ce dernier est aigu, sinon il vaut $2(\pi - \alpha)$.



- Inégalité triangulaire : $\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

1. Soient M_1, M_2, M_3 trois points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 . On peut supposer pour plus de commodité que ces trois points sont différents de O.

- a. Il peut être intéressant de démontrer l'inégalité triangulaire (plusieurs méthodes possibles).
- b. Montrer que :

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}^* \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}^* \quad \forall z_3 \in \mathbb{C}^* :$$

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3| \Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}_+^* \quad z_2 = \lambda_2 z_1 \text{ et } z_3 = \lambda_3 z_1$$

Remarque : M_1, M_2, M_3 sont donc sur la même demi-droite d'origine O.

- c. Montrer que M_1, M_2, M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O si et seulement si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ et $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (on pourra réfléchir aux relations entre les formes complexes de z_1, z_2, z_3)

2. Soient A, B et C trois points différents de O, d'affixes respectives a, b et c . On pose $a' = \frac{a}{|a|}$, $b' = \frac{b}{|b|}$ et

$c' = \frac{c}{|c|}$, A', B', C' étant leurs images respectives. On suppose que $a' + b' + c' = 0$.

- a. Montrer que $S = \overline{a'}(a - z) + \overline{b'}(b - z) + \overline{c'}(c - z)$ est indépendant de z .
- b. En déduire que $|a| + |b| + |c| \leq |a - z| + |b - z| + |c - z|$ (1)
- c. Montrer qu'il n'y a égalité dans (1) que si $(\overline{OA}; \overline{AM}) = (\overline{OB}; \overline{BM}) = (\overline{OC}; \overline{CM})$ (2)
- d. Montrer que si O, A, B, C et M ne sont pas cocycliques, alors (2) équivaut à $M = O$.
- e. On suppose maintenant que O, A, B, C et M sont cocycliques.

Soit Ω le centre du cercle correspondant. On se place dans le repère d'origine O, ayant pour demi-axe des abscisses positif $[O\Omega]$.

Montrer qu'alors A', B' et C' sont dans le même demi-plan. En déduire une contradiction.

On a donc montré que (2) équivaut à $M = O$

3. ☹ Soit A, B et C un triangle dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer le point tel que la somme des distances à A, B et C est minimale. Réaliser la construction géométrique à la règle et au compas.

INCLASSABLES / ENIGMES

Des exercices de niveaux plus variés, mais qui demandent beaucoup de réflexion pour le niveau indiqué !

V-1 Niveau 1^{ère}.

On remarque que :

$$1+2 = 3$$

$$4+5+6 = 7+8$$

$$9+10+11+12 = 13+14+15$$

Généraliser.

V-2 Niveau 2^{nde} puis 1^{ère}

On construit un damier carré de $5 \times 5 = 25$ cases, en y rangeant les nombres de 1 à 25 comme ceci. On choisit 5 nombres, un seul par ligne et un seul par colonne.

Exemple :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1. Montrer que la somme de ces cinq nombres vaut toujours 65.
2. Généraliser à un damier carré de taille quelconque.

V-3 Les interrupteurs.

INDICES

Indices 1-14

Pour la méthode, on peut commencer à prouver que $0,999\dots = 1$. [Retour 1-14](#)

Indices 1-16

On se place dans le cas où $n > m$. Soit 2^r la plus grande puissance entière de 2 divisant au moins un entier dans $[n\dots m]$. Montrer qu'en fait 2^r divise un unique entier dans $[n\dots m]$, en déduire que $\sum_{i=m}^n \frac{1}{i}$ n'est pas un entier (théorème de Kurschak). [Retour 1-16](#)

Indices 1-25

- Utiliser Gauss

[Retour 1-25](#)

Indices 1I-31

- poser $A_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^p a_i}$ et $B_i = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^p b_i}$

- on pourra passer au logarithme et factoriser par d_n pour la limite en $+\infty$)

-

[Retour 2-31](#)

Indices II-32

Méthode 1

- Montrer que $x \cdot f(x)$ est invariant par f .
- Montrer que si a est invariant par f , alors a^n et a^{-n} sont invariants par f .
- Conclure sur les invariants de f , puis sur f .

Méthode 2 (trouvée par un élève, non validée)

- Montrer que f est une bijection strictement décroissante
- En déduire que f est continue (une aide du professeur est la bienvenue)
- Il y a peut-être une étape « dérivabilité »
- Trouver un invariant de f , conclure

[Retour 2-32](#)

Indice IV-5

On pourra calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{\theta}$

[Retour 4_5](#)

Indice IV-6

2b

- Thalès est ton ami, plutôt trois fois qu'une.
- suivant vos connaissances sur les homothéties et la droite d'Euler, la déduction peut être plus ou moins intuitive et/ou détaillée.

2b 2^{ème} partie : on pourra étudier le triangle $A_2 A_0 B$

2c : on peut composer l'homothétie du b. avec elle-même

3 : bissectrices

5b : Indices : Al-Kashi + Euler

[Retour 4_6](#)